Title	A construction of 3-manifolds with involution
Author(s)	北村, 雅子
Citation	数理解析研究所講究録 (1987), 624: 33-45
Issue Date	1987-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/99936
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
624巻 1987年 33-45

A construction of 3-manifolds with involution

神戸大理　北村 雅子 (Masako Kitamura)

§1 Introduction

Closed orientable 3-manifold M で orientation reversing involution τ (i.e. $\tau : M \to M$: orientation reversing homeo, τ^2=identity) をもつものを考えます。

このような多様体について、Kawauchi[1] により、次が証明されています。

Theorem 1. (Kawauchi)

$H_1(M:\mathbb{Z})$ の torsion part はあるアーベル群 A の direct double $A\oplus A$、又は $\mathbb{Z}_2$ と A 2つの直和 $\mathbb{Z}_2\oplus A\oplus A$ に同型である。

又、逆に、上の性質をもつアーベル群 G (i.e. $\mathrm{Tor}G \cong A\oplus A$, or. $\mathbb{Z}_2\oplus A\oplus A$) について、$H_1(M:\mathbb{Z})\cong G$ となるような、ori. rev.

involution をもつ closed orientable 3-mfd が同論文で構成されています。その 3-mfd を特に irreducible なもので構成できるか、という問題については、

Theorem 2. (Kawauchi)

$H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$. A : odd order ならば、M は P^3 とある 3-mfd との connected sum で表わせられる。

Theorem 3. (Kawauchi)

$\mathrm{Tor}\,G \cong A \oplus A$ であるような任意のアーベル群 G について、$H_1(M:\mathbb{Z}) \cong G$ となるような、ori. rev. involution をもつ、closed irreducible orientable 3-mfd が存在する。

が知られています。そこで、本稿では Th 2・3 以外の、前述の性質をもつアーベル群 G に対して、$H_1(M:\mathbb{Z}) \cong G$ となる M を irreducible で構成します。

このような G は次の2つに分類することができます。

Case 1. $\mathrm{Tor}\,G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$ (possibly $A=0$), $G/\mathrm{Tor}\,G \neq 0$,

Case 2. $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$, A : even order

Mの構成もこの分類に従がって行ないます。

以下. S^3上の orientation reversing involution を

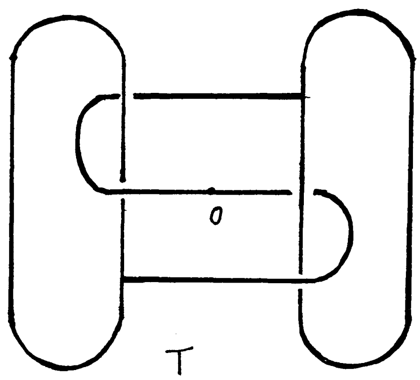
$$\tau: S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$$
$$(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, -z)$$
$$\infty \longrightarrow \infty$$

で定義します。

§2 Case 1 のMの構成

Case 1 のアーベル群は. 具体的に $G \cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{s} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{p_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_r}\oplus\mathbb{Z}_{p_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_r}$ $(s \geqq 1,\ r \geqq 0,\ p_1, \cdots, p_r \in \mathbb{Z})$ の形に直和分解できます。

Step 1 $H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$ であるようなMの構成。



T

Fig. 1

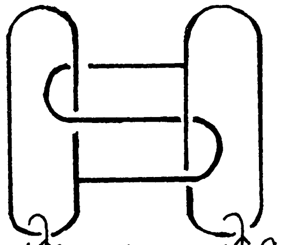
まずS^3内に. Fig 1 のような graph T を. $(0.0.0) \in \mathbb{R}^3 \subset S^3$ を含み. τ-invariant であるように選びます。 $M_1 = \overline{S^3 - N(T)}$ ($N(T)$ は T の τ-invariant regular neighborhood) とすると. $\partial M_1 = F$ は genus 2 の orientable surface, そこで. F 上の involution

$\tau' = \tau|_F$ を使って. $M_2 = F \times I / (x, 1) \sim (\tau'(x), 1)$　$(I = [0, 1])$ とすると. M_2 は genus 3 の non-orientable surface 上の twisted I-bundle となり. $\tau'' : M_2 \to M_2$　, $\tau''(x, t) = (\tau'(x), t)$ という involution をもっています.

$M = M_1 \cup_h M_2$　, $h : \partial M_2 = F \times 0 \to \partial M_1 = F$: identity map. とすると M は τ, τ'' から induce される ori. rev. involution をもっていますが さらに. $H_1(M : \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, かつ M は irreducible であることが次のように確かめられます。

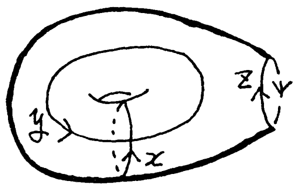
∘ $H_1(M : \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$

M_1, M_2, F の first homology を



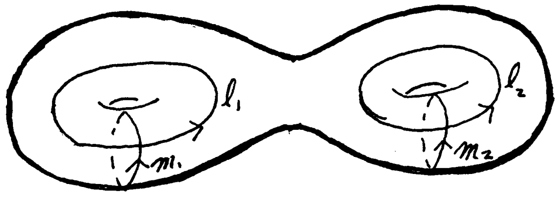
M_1

$H_1(M_1 : \mathbb{Z}) \cong \langle a_1, a_2 : \ \rangle$



$F \times \{1\} / \sim \ \subset M_2$

$H_1(M_2 : \mathbb{Z}) \cong \langle x, y, z : 2z = 0 \rangle$



$F = \partial M_1 = \partial M_2$

$H_1(F : \mathbb{Z}) \cong \langle m_1, m_2, l_1, l_2 : \ \rangle$

as abelian group presentation

と表わすと. inclusion induced map $i_j : H_1(F:\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(M_j:\mathbb{Z})$ $(j=1.2)$ によって.

$i_1(m_1)=a_1$, $i_1(m_2)=a_2$, $i_1(l_1)=0$, $i_1(l_2)=0$,

$i_2(m_1)=x$, $i_2(m_2)=-x$, $i_2(l_1)=y$, $i_2(l_2)=y$.

となります。従がって.

$$H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \langle a_1, a_2, x, y, z : 2z=0,\ a_1=x,\ a_2=-x,\ y=0 \rangle$$
$$\cong \langle x, z : 2z=0 \rangle$$
$$\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2 .$$

。M が irreducible であること.

これを示すためには M_1, M_2 が共に irreducible かつ boundary-irreducible であることを示せば十分です。M_2 は closed surface 上の twisted I-bundle ですから明らかに irreducible かつ ∂-irreducible, M_1 は S^3 から connected graph をとり除いたものですから. Schönflies theorem より irreducible であることが示せます。

M_1 の ∂-irreducibility について。M_1 に properly embedded essential disk D が存在したとして. この D で M_1 を cut してみます。∂D が ∂M_1 上の essential loop であることに注意すると. M−D は 1 or 2-component で. 各 component は solid torus か knot exterior であることがわかります. M_1-D が 1-component なら.

M_1はM$_1$−Dに1-handleをつけたもの。M$_1$−Dが2-componentならばM_1はその2つのboundary sumですから、いずれにせよ、M_1の基本群は$\pi_1(M_1) \cong H_1 * H_2$ (free product), H_iはknot group, となるはずです。ところで、M_1はS^3からgraphをとり除いたものですから、$\pi_1(M_1)$のAlexander matrixが考えられますが〔2〕、上の考察より、$\pi_1(M_1)$のAlexander polynomial $\Delta(t)$は、$\Delta(t^{-1}) = t^{\alpha}\Delta(t)$ (for some $\alpha \in \mathbb{Z}$) という性質を持たねばならないことがわかります。しかし、実際に$\pi_1(M)$を計算し、そのAlexander poly.を求めると、この性質をもっていないことがわかります。(詳しくは〔3〕参照) よってM_1も∂-irreducibleです。

Step 2　$H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{s}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{p_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_r}\oplus\mathbb{Z}_{p_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_r}$ であるようなMの構成。

Kawauchi〔1〕とほぼ同様の構成を行ないます。

S^3内にFig.2のように$s+r$個のknotsとgraph Tを、次の性質をもつように選びます。

- $J, k_1, \cdots, k_{s-1}$はτ-invariant.
- $J, k_1, \cdots, k_{s-1}, L_1, \cdots, L_r$は$\tau$のfixed pointsを含まない。
- Tはstep 1と同じ。
- $T, J, k_1, \cdots, k_{s-1}, L_1, \cdots, L_r, \tau(L_1), \cdots, \tau(L_r)$はmutually disjoint.

・$T, k_1, \cdots, k_{s-1}, L_1, \cdots, L_r$ は $S^3 - J$ で π_1-nontrivial.

・$k_1, \cdots, k_{s-1}, L_1, \cdots, L_r, \tau(L_1), \cdots, \tau(L_r)$ のどの2つも linking number 0。

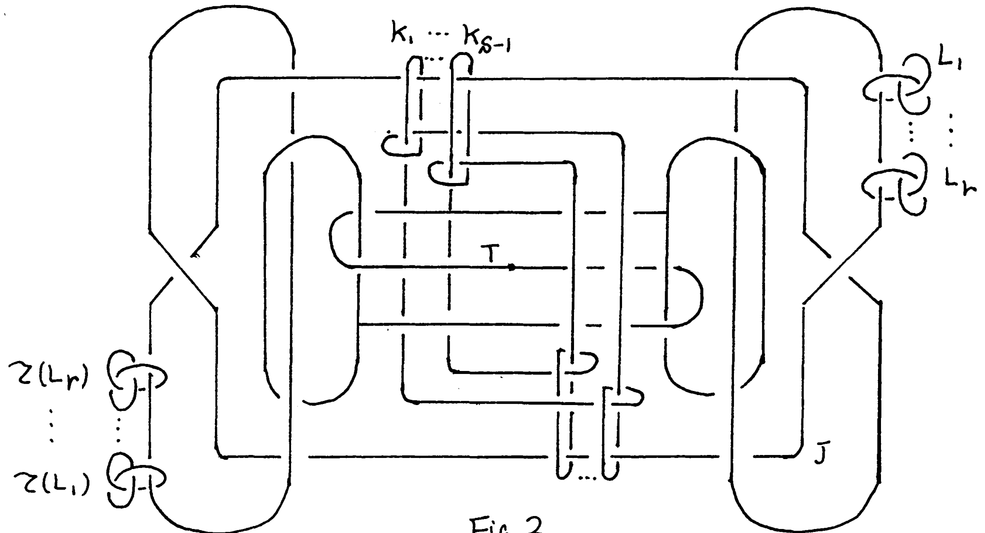


Fig 2

S^3 からこの link と graph の τ-invariant regular neighborhood を除き、各 boundary component に次のように $2r+s+1$ 個の mfd をつけます。

。$\partial N(J) \longleftrightarrow \overline{S^3 - N(J')}$. J' は τ の fixed points を含む τ-invariant non trivial knot. $\partial N(J)$ の preferred longitude が $\partial N(J')$ の meridian となるようにつける。

($\overline{S^3 - N(J)} \cup \overline{S^3 - N(J')}$ は π_1-infinite homology 3-sphere)

。$\partial N(k_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, s-1)$ $\longleftrightarrow$ $\overline{S^3 - N(J'')}$. J'' は τ の fixed points を含まない τ-invariant nontrivial knot. $\partial N(k_i)$ の preferred longitude が $\partial N(J'')$ の preferred longitude となるようにつける.

(この操作で homology の $\mathbb{Z}$ part が生じる.)

・$\partial N(L_i)$ $(i=1,\cdots,r)$ $\longleftrightarrow$ $\overline{S^3 - N(L'_i)}$. L'_i は non trivial knot.
$\partial N(L_i)$ の preferred longitude が $\partial N(L'_i)$ 上の、L'_i と P_i 回 link する curve となるようにつける。

・$\partial N(\tau(L_i))$ $(i=1,\cdots,r)$ $\longleftrightarrow$ (a copy of) $\overline{S^3 - N(L'_i)}$. attaching homeo が τ と可換になるようにつける。
（この操作で homology の $\mathbb{Z}_{p_i} \oplus \mathbb{Z}_{p_i}$ が生じる。）

・$\partial N(T)$ $\longleftrightarrow$ twisted I-bundle. Step 1 の要領で。
（この操作で homology の $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ が生じる。）

$k_1,\cdots,k_{s-1}, L_1,\cdots,L_r$ の互いの linking number が 0 であることから、こうしてできた mfd M の first integral homology は求めるものであることがわかります。M の irreducibility は各 parts の irreducibility と ∂-irreducibility より導けます。Fig. 2 の link は上の性質をもっていればよいので、link type にはかなりの自由度があります。

§3 Case 2 の M の構成

Case 2 のアーベル群は具体的に $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r}$ $(r \geq 0,\ n, p_1, \cdots, p_r \in \mathbb{Z})$ の形に直和分解できます。

Step 1 $H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}$ であるような M の構成。

まず. genus 2 の handle body M_3 とその上の ori. rev. involution τ で fixed point set が 3 points からなるものを考えます。

(Fig.3 の3つの3-ball に antipodal map を考え、それを handles に拡張する。)

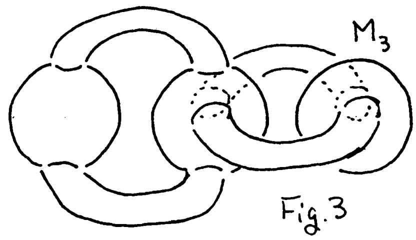


Fig.3

M_3 内に2つの curves k_1, k_2 を Fig.4 のように、次の性質をもつよう選びます。

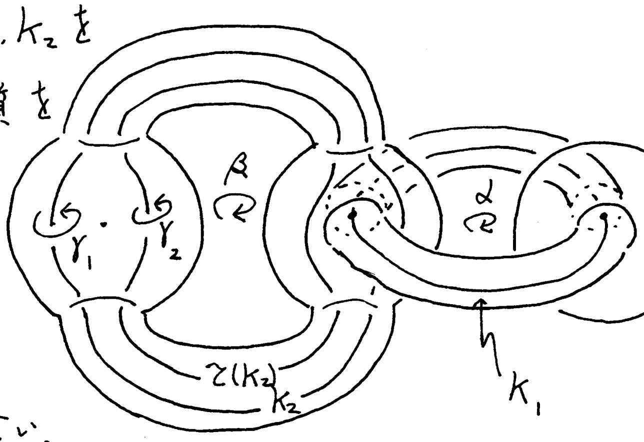


Fig. 4

・k_1 は τ-invariant、fixed points を2点含む。

・k_2 は fixed points を含まない。

・$k_1, k_2, \tau(k_2)$ は muturlly disjoint.

・$[k_1] = \alpha \in H_1(M_3 : \mathbb{Z})$, $[k_2] = \beta \in H_1(M : \mathbb{Z})$

(α, β は Fig.4 に示した $H_1(M:\mathbb{Z})$ の generators.)

M_3 から $k_1 \cup k_2 \cup \tau(k_2)$ の τ-invariant regular neighborhood をとり除き 3つの mfd を次のようにつけます。

・$\partial N(k_1) \longleftrightarrow \overline{S^3 - N(J'')}$. J''は(S^3のinvolution の) fixed points を含まないτ-invariant nontrivial knot. $\partial N(k_1)$のpreferred longitude が $\partial N(J'')$ の meridian となるように.

(この操作で homology は変わらないが. irreducibility に必要.)

・$\partial N(k_2) \longleftrightarrow \overline{S^3 - N(L)}$. L は nontrivial knot. $\partial N(L)$ の preferred longitude が $\partial N(k_2)$上の curve C s.t. $[C] = n\gamma_1 + \beta$ $\in H_1(\overline{M_3 - N(k_2 \cup \tau(k_2))} : \mathbb{Z})$ となるように.

・$\partial N(\tau(k_2)) \longleftrightarrow$ (a copy of) $\overline{S^3 - N(L)}$. $\partial N(L)$ のpreferred longitudeが $\partial N(\tau(k_2))$ 上のcurve C' s.t. $[C'] = n\gamma_2 - \beta$ $\in H_1(\overline{M_3 - N(k_2 \cup \tau(k_2))} : \mathbb{Z})$ となるように.

(γ_1. γ_2 は. k_2. $\tau(k_2)$ をM_3から除いたことで生じる homology generators. Fig 4 参照.)

こうしてできたmfd をM_4とすると. M_4は ori. rev. involution をもち. $H_1(M_4 : \mathbb{Z}) \cong \langle \alpha. \beta. \gamma_1. \gamma_2 : n\gamma_1 + \beta = 0. n\gamma_2 - \beta = 0 \rangle$ となっています.

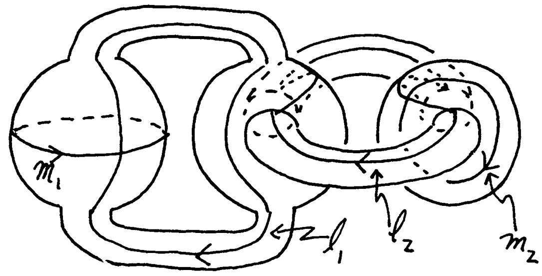
$F = \partial M_4$ は genus 2 の orientable surface で involution $\tau' = \tau|_F$ をもっています. $M_5 = F \times I / (x.1) \sim (\tau'(x).1)$ とし. $M = M_4 \cup_h M_5$, $h : \partial M_5 = F \times 0 \longrightarrow \partial M_4 = F$: identity map. とすると. M は ori. rev. involution をもつ closed orientable mfd になっていますが. さらに. $H_1(M : \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}$, M : irreducible であることが. 次のよう

に確かめられます.

∘ $H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}$

M_5. F の first homology を

$F\times\{1\}/\sim \subset M_5$



$F = \partial M_4 = \partial M_5$

$H_1(M_5:\mathbb{Z}) \cong \langle x, y, z : 2x+2y+2z=0 \rangle$ $\quad H_1(F:\mathbb{Z}) \cong \langle m_1, m_2, l_1, l_2 : \ \rangle$.

と表すと inclusion induced map $i_j : H_1(F:\mathbb{Z}) \to H_1(M_j:\mathbb{Z})$ ($j=4.5$) によって

$i_1(m_1) = \gamma_1 + \gamma_2$, $i_1(m_2) = 0$, $i_1(l_1) = \beta$, $i_1(l_2) = \alpha$.

$i_2(m_1) = 2x$, $i_2(m_2) = 2z$, $i_2(l_1) = x+y+2z$, $i_2(l_2) = 2x+y+z$.

となります. 従がって.

$$
\begin{aligned}
H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \langle\, & \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, x, y, z : \\
& n\gamma_1 + \beta = 0,\ n\gamma_2 - \beta = 0,\ 2x+2y+2z=0, \\
& \gamma_1+\gamma_2 = 2x,\ 2z=0,\ \beta = x+y+2z,\ \alpha = 2x+y+z \,\rangle \\
\cong \langle\, & \gamma_2, x, z : 2n\gamma_2 = 0,\ 2nx = 0,\ 2z = 0 \,\rangle \\
\cong\ & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}.
\end{aligned}
$$

∘M が irreducible であること.

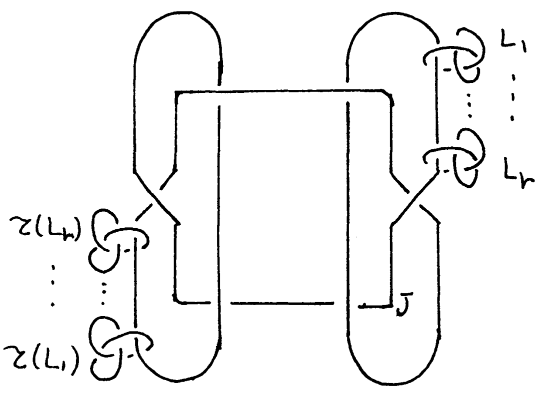
§1 と同様. M の各 part の irreducibility と ∂-irreducibility を示せ

ばよいのですが、non trivial knot exterior はその性質をもっていますから、問題となるのは $\overline{M_3 - N(k_1 \cup k_2 \cup \tau(k_2))}$ についてのみです。まず、M_3 (handlebody) が irreducible であることから、もしこの mfd 内に essential 2-sphere があるとすればその内部に、k_1, k_2 又は $\tau(k_2)$ が含まれることになり、curves の選び方に矛盾。よって irreducible. ∂-irreducibility についても、もし essential disk が存在したとすると、同様にして矛盾が導けます。
(詳しくは[3]参照.)

Step 2. $H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r}$ であるような M の構成.

まず $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r}$ のための mfd を用意します。

§1. Step2 の $J, L_1, \cdots, L_r$ を考え $L_1, \cdots, L_r, \tau(L_1), \cdots, \tau(L_r)$ に §1. Step2 と同様の操作をすることで、これが得られます。



Step 1. で作った mfd では、
$M \supset M_3' \supset \partial N(k_1)$ に non trivial knot exterior $S^3 - N(J'')$ をつけまし

たが．そのかわりに上で作ったmfdを$\partial N(K_1)$のpreferred longitudeが$\partial N(J)$のmeridianになるようにつけると．できたmfd Mは求めるhomologyをもち．irreducibleであって．ori.rev.involutionをもつことがわかります。

最後に．

本稿で構成したmfdsのfixed point setのうち2-dimensional componentは．いずれもgenus 3のnon orientable surfaceになっていますが．ほぼ同様の構成法によって．surfaceのgenusやcomponent数を増やすことができます。ただし．そのgenus数の総和には．Mのfirst integral homology groupの影響による制限があるようです。

尚．本稿の問題は河内先生にいただいたものです。多くの助言をいただいた作間先生．中西先生に感謝いたします。

References

[1] A. Kawauchi, On 3-manifolds admitting orientation-reversing involutions, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 571-589.

[2] S. Suzuki, Alexandar ideals of graphs in the 3-sphere, Tokyo J. Math 7 (1984), 233-247.

[3] M. Kitamura, A construction of certain 3-manifolds with orientation reversing involution, preprint.